Анализа 1

15.10.2020

Математичка индукција

1. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ такви да је $x_i > -1$, $\forall i$, и нека су сви x_i истог знака. Доказати да $\forall n \in \mathbb{N}$ важи:

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$$

⌜Специјално, за $\alpha > -1$ важи $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.⌟

2. Доказати да за $\forall n > 1$ важи

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$$

3. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ позитивни реални бројеви такви да је $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n = 1$. Доказати да за $\forall n \in \mathbb{N}$ важи:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \geq n$$

4. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ позитивни реални бројеви. Означимо са

$$A_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \qquad H_n = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$

Доказати да $\forall n \in \mathbb{N}$ важи

$$A_n \geq G_n \geq H_n$$

5. Доказати да $\forall n \geq 3$ важи

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n$$

6. Доказати да $\forall n \in \mathbb{N}$ важи

а) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

б) $(n!)^2 \leq \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$

7. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0,\pi]$. Доказати да за $\forall n \in \mathbb{N}$ важи

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i$$

Архимедов принцип

1. Доказати да је скуп $X=\left\{\frac{n}{2^m} \mid n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}\right\}$ свуда густ у $\mathbb{R}$.

2. Доказати да је скуп $X=\left\{\frac{m}{3^k 5^l} \mid m\in\mathbb{Z}, k,l\in\mathbb{N}\right\}$ свуда густ у $\mathbb{R}$.

Инфимум и супремум скупа

1. Наћи инфимум и супремум скупа

$$X=\left\{\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

2. Наћи инфимум и супремум скупа

а) $X=\left\{\frac{3n-4m}{5n+6m} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$

б) $X=\left\{\frac{n-m}{m+2n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$